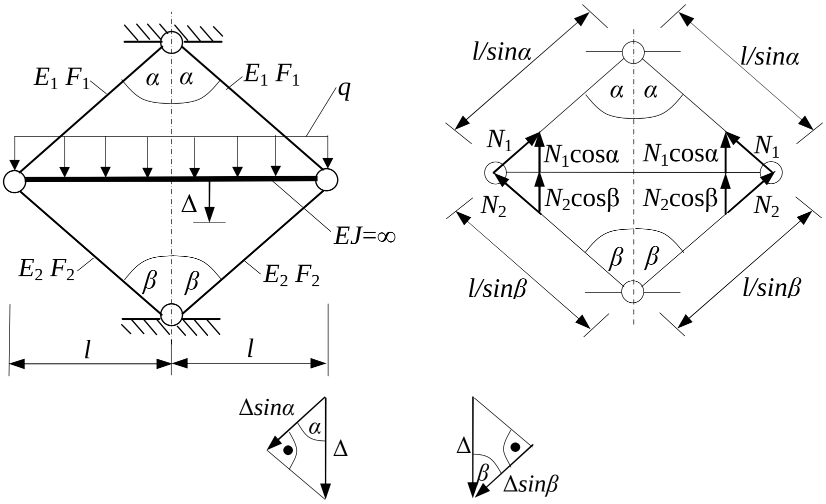


Rys. 1.6.

Rozwiązanie:

Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Z uwagi na symetrię zadania pozioma belka nieodkształcalna przemieści się pionowo o pewną wartość Δ, natomiast w prętach ukośnych powstaną przemieszczenia o wartości $\Delta sin\alpha$ i $\Delta sin\beta$

a) W **zadaniu liniowo sprężystym** opisanym równaniami fizycznymi

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon,\ \sigma_2 = E_2\varepsilon_2$$

wydłużenia i siły w prętach wynoszą odpowiednio

$$\frac{N_1 l}{(\sin\alpha)E_1F_1} = \Delta\sin\alpha \quad \text{i} \quad \frac{N_2 l}{(\sin\beta)E_2F_2} = \Delta\sin\beta \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{N_1 l}{(\sin^2\alpha)E_1F_1} = \frac{N_2 l}{(\sin^2\beta)E_2F_2}$$

Warunek sumy rzutów sił na kierunek pionowy opisany jest zależnością

$$2N_2\cos\beta + 2N_1\cos\alpha - 2ql = 0$$

Siły N_1 i N_2 wyznaczymy więc z układu równań

$$\frac{N_1 l}{(\sin^2\alpha)E_1F_1} = \frac{N_2 l}{(\sin^2\beta)E_2F_2} \quad \text{i} \quad N_1\cos\alpha + N_2\cos\beta = ql$$

stąd

$$N_1 = aN_2 \ \text{ i } \ N_2 = \frac{ql}{\cos\alpha}\left(a + \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^{-1}$$

gdzie

$$a = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\right)^2 \frac{E_1F_1}{E_2F_2}$$

b) Dla układu wykonanego z materiału **nieliniowo sprężystego**, opisanego równaniami fizycznymi

$$\sigma_1 = A_1\varepsilon_1^{\ N}, \ \sigma_2 = A_2\varepsilon_2^{\ N}$$

wydłużenia prętów ukośnych wynoszą odpowiednio

$$\left(\frac{N_1}{A_1F_1}\right)^n \frac{l}{\sin\alpha} = \Delta\sin\alpha \quad \text{i} \quad \left(\frac{N_2}{A_2F_2}\right)^n \frac{l}{\sin\beta} = \Delta\sin\beta \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{N_1}{A_1F_1}\right)^n \frac{l}{\sin^2\alpha} = \left(\frac{N_2}{A_2F_2}\right)^n \frac{l}{\sin^2\beta}$$

Warunek sumy rzutów wszystkich sił na kierunek pionowy opisany jest zależnością

$$2N_2\cos\beta + 2N_1\cos\alpha - 2ql = 0$$

Wtedy siły N_1 i N_2 można wyznaczyć z układu równań

$$\left(\frac{N_1}{A_1F_1}\right)^n \frac{1}{\sin^2\alpha} = \left(\frac{N_2}{A_2F_2}\right)^n \frac{1}{\sin^2\beta} \quad \text{i} \quad \mathrm{N}_1\cos\alpha + N_2\cos\beta = ql$$

stąd

$$N_1 = AN_2 \ \text{ i } \ N_2 = \frac{ql}{\cos\alpha}\left(A + \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^{-1}$$

gdzie

$$A = \frac{A_1 F_1}{A_2 F_2}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^{2/n}$$

Z porównania sił N_1 i N_2 w zadaniu liniowym i nieliniowym wynika relacja

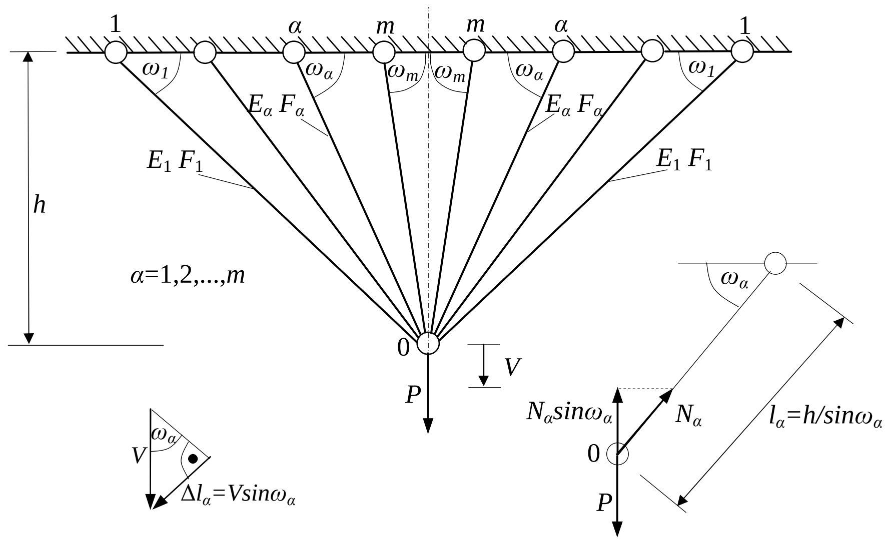
$$\frac{N_2}{N_2^N} = \left(A + \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)\left(a + \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^{-1} \quad i \quad \frac{N_1}{N_1^N} = \frac{a}{A}\frac{N_2}{N_2^N}$$

lub

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{aN_1^N}{AN_2^N}$$

ZADANIE 1.7.

Na układ prętów połączonych w punkcie 0, symetrycznych względem osi pionowej działa obciążenie pionowe P (rys. 1.7). Należy określić siły w poszczególnych prętach układu w przypadku liniowo i nieliniowo sprężystym.



Rys. 1.7.

Rozwiązanie:

Warunek nierozdzielności przemieszczeń węzła 0 niezależnie od własności materiału prowadzi do równań postaci

$$\Delta l_\alpha = V \sin\omega_\alpha$$

a) W **zadaniu liniowo sprężystym** opisanym równaniami fizycznymi

$$\sigma^{\alpha} = E^{\alpha}\varepsilon \rightarrow \Delta l_{\alpha} = \frac{N_{\alpha} l_{\alpha}}{E^{\alpha} F^{\alpha}} \rightarrow \Delta l_{\alpha} = \frac{N_{\alpha} h}{E^{\alpha} F^{\alpha} \sin \omega_{\alpha}}$$

siła osiowa w dowolnym pręcie (α) wynosi

$$N_{\alpha} = \frac{E^{\alpha} F^{\alpha}}{h} \sin \omega_{\alpha} \cdot \Delta l_{\alpha} = E^{\alpha} F^{\alpha} \frac{V}{h} \sin^2 \omega_{\alpha}$$

Z warunku równowagi – sumy rzutów sił na kierunek pionowy otrzymamy

$$P = 2\sum_{\alpha} N_{\alpha} \sin \omega_{\alpha} \rightarrow P = 2\frac{V}{h} \sum_{\alpha} E^{\alpha} F^{\alpha} \sin^3 \omega_{\alpha} \rightarrow$$

$$\rightarrow V = \frac{P}{2} h \left[\sum_{\alpha} E^{\alpha} F^{\alpha} \sin^3 \omega_{\alpha} \right]^{-1}$$

stąd

$$N_{\alpha} = \frac{P}{2} E^{\alpha} F^{\alpha} \sin^2 \omega_{\alpha} \left[\sum_{\alpha} E^{\alpha} F^{\alpha} \sin^3 \omega_{\alpha} \right]^{-1}$$

b) W **zadaniu nieliniowo sprężystym** opisanym równaniami fizycznymi

$$\sigma_{\alpha} = A^{\alpha} \varepsilon^{N} \rightarrow \Delta l_{\alpha} = \left(\frac{N_{\alpha}}{A^{\alpha} F^{\alpha}} \right)^{n} l_{\alpha} \rightarrow \Delta l_{\alpha} = \left(\frac{N_{\alpha}}{A^{\alpha} F^{\alpha}} \right)^{n} \frac{h}{\sin \omega_{\alpha}}$$

siła osiowa w dowolnym pręcie (α) wynosi

$$N_{\alpha} = A^{\alpha} F^{\alpha} \left(\frac{\Delta l_{\alpha}}{h} \sin \omega_{\alpha} \right)^{N} = A^{\alpha} F^{\alpha} \left(\frac{V}{h} \sin^2 \omega_{\alpha} \right)^{N}$$

Z warunku równowagi - sumy rzutów sił na kierunek pionowy otrzymamy

$$P = 2\sum_{\alpha} N_{\alpha} \sin \omega_{\alpha} \rightarrow P = 2\left(\frac{V}{h} \right)^{N} \sum_{\alpha} A^{\alpha} F^{\alpha} \left(\sin^2 \omega_{\alpha} \right)^{N} \sin \omega_{\alpha} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{V}{h} \right)^{N} = \frac{P}{2} \left[\sum_{\alpha} A^{\alpha} F^{\alpha} \left(\sin^2 \omega_{\alpha} \right)^{N} \sin \omega_{\alpha} \right]^{-1}$$

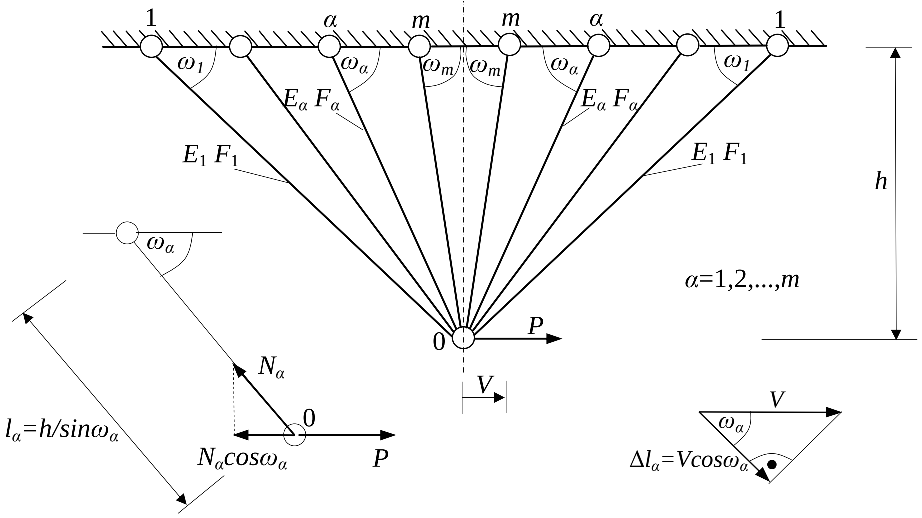
stąd

$$N_\alpha = \frac{P}{2} A^\alpha F^\alpha \left(\sin^2 \omega_\alpha\right)^N \left[\sum_\alpha A^\alpha F^\alpha \left(\sin^2 \omega_\alpha\right)^N \sin \omega_\alpha \right]^{-1}$$

Otrzymane wzory są słuszne dla dowolnej ilości prętów przy zachowaniu symetrii układu oraz ich sztywności $E^\alpha F^\alpha$ oraz $A^\alpha F^\alpha$.

ZADANIE 1.8.

W zadaniu o konfiguracji jak w poprzednim przykładzie na punkt 0 działa siła pozioma P (rys. 1.8.). Należy wyznaczyć siły w poszczególnych prętach układu w przypadku liniowo i nieliniowo sprężystym.



Rys. 1.8.

Rozwiązanie:

Schemat statyczny zadania wraz z przemieszczeniami przedstawia rys. 1.8. Warunek nierozdzielności przemieszczeń węzła 0 prowadzi do równań postaci

$$\Delta l_\alpha = V \cos \omega_\alpha$$

a) W **zadaniu liniowo sprężystym** opisanym równaniami fizycznymi

$$\sigma^\alpha = E^\alpha \varepsilon \to \Delta l_\alpha = \frac{N_\alpha l_\alpha}{E^\alpha F^\alpha} \to \Delta l_\alpha = \frac{N_\alpha h}{E^\alpha F^\alpha \sin\omega_\alpha}$$

siła osiowa w dowolnym pręcie (α) wynosi

$$N_\alpha = \frac{E^\alpha F^\alpha}{h}\sin\omega_\alpha \cdot \Delta l_\alpha = E^\alpha F^\alpha \frac{V}{h}\sin\omega_\alpha \cos\omega_\alpha$$

Z warunku równowagi – sumy rzutów sił na kierunek poziomy otrzymamy

$$P = 2\sum_\alpha N_\alpha \cos\omega_\alpha \to P = 2\frac{V}{h}\sum_\alpha E^\alpha F^\alpha \sin\omega_\alpha \cos^2\omega_\alpha \to$$

$$\to V = \frac{P}{2}h\left[\sum_\alpha E^\alpha F^\alpha \sin\omega_\alpha \cos^2\omega_\alpha\right]^{-1}$$

stąd

$$N_\alpha = \frac{P}{2}E^\alpha F^\alpha \sin\omega_\alpha \cos\omega_\alpha\left[\sum_\alpha E^\alpha F^\alpha \sin\omega_\alpha \cos^2\omega_\alpha\right]^{-1}$$

b) W **zadaniu nieliniowo sprężystym** opisanym równaniami fizycznymi

$$\sigma_\alpha = A^\alpha \varepsilon^N \to \Delta l_\alpha = \left(\frac{N_\alpha}{A^\alpha F^\alpha}\right)^n l_\alpha \to \Delta l_\alpha = \left(\frac{N_\alpha}{A^\alpha F^\alpha}\right)^n \frac{h}{\sin\omega_\alpha}$$

siła osiowa w dowolnym pręcie (α) wynosi

$$N_\alpha = A^\alpha F^\alpha\left(\frac{\Delta l_\alpha}{h}\sin\omega_\alpha\right)^N = A^\alpha F^\alpha\left(\frac{V}{h}\sin\omega_\alpha \cos\omega_\alpha\right)^N$$

Z warunku równowagi sumy rzutów sił na oś poziomą otrzymamy

$$P = 2\sum_\alpha N_\alpha \cos\omega_\alpha \to P = 2\left(\frac{V}{h}\right)^N \sum_\alpha A^\alpha F^\alpha (\sin\omega_\alpha \cos\omega_\alpha)^N \cos\omega_\alpha \to$$

$$\to \left(\frac{V}{h}\right)^N = \frac{P}{2}\left[\sum_\alpha A^\alpha F^\alpha (\sin\omega_\alpha \cos\omega_\alpha)^N \cos\omega_\alpha\right]^{-1}$$

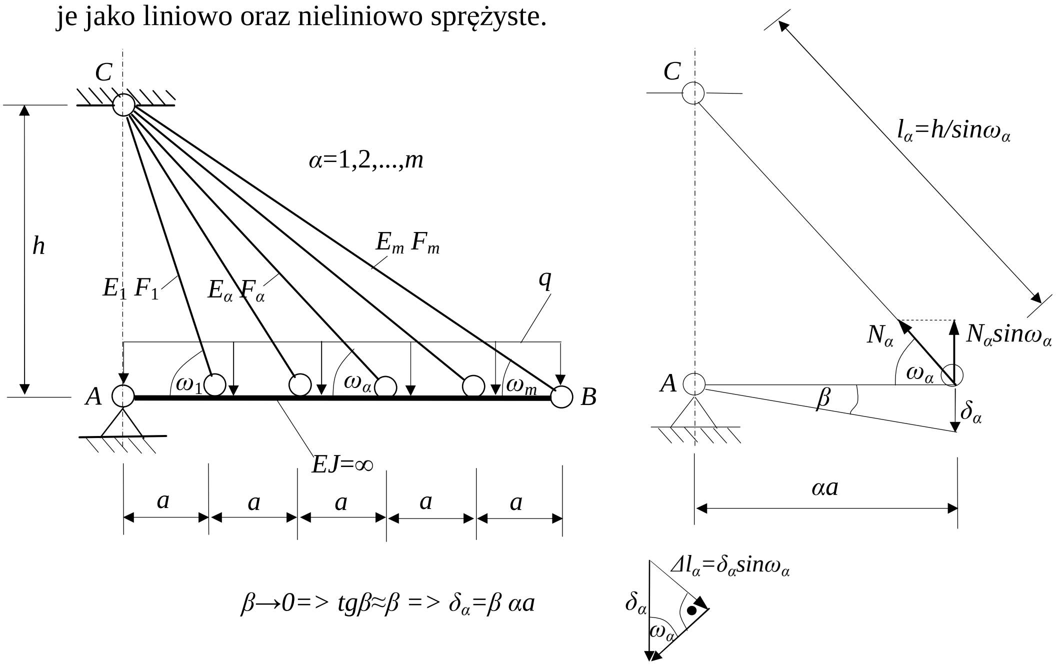
stąd

$$N_\alpha = \frac{P}{2} A^\alpha F^\alpha \left(\sin\omega_\alpha \cos\omega_\alpha\right)^N \left[\sum_\alpha A^\alpha F^\alpha \left(\sin\omega_\alpha \cos\omega_\alpha\right)^N \cos\omega_\alpha\right]^{-1}$$

Otrzymane wzory są słuszne dla dowolnej ilości prętów przy zachowaniu symetrii układu prętów oraz ich sztywności $E^\alpha F^\alpha$ oraz $A^\alpha F^\alpha$.

ZADANIE 1.9.

Nieskończenie sztywna $(EJ = \infty)$ belka pozioma AB jest przegubowo podparta w punkcie A. Do belki tej w równych odstępach *a* przymocowano odciągi z lin stalowych (rys. 1.9.). Należy wyznaczyć siły w odciągach traktując je jako liniowo oraz nieliniowo sprężyste.



Rys. 1.9.

Rozwiązanie:

W wyniku odkształceń odciągów sztywna belka AB obróci się o kąt β względem przegubu A, a punkt α zamocowania liny o długości l_α z belką AB przemieści się pionowo o wartość

$$\delta_\alpha = \beta\,\alpha a, \quad \alpha = 1,2,\ldots,m$$

Wówczas wydłużenie liny o długości l_α dane będzie zależnością

$$\Delta l_\alpha = \delta_\alpha \sin\omega_\alpha = \beta\alpha a \sin\omega_\alpha$$

a) Zakładając, że odciągi wykonane są z **materiału liniowo sprężystego**

$$\sigma^\alpha = E^\alpha \varepsilon^\alpha \to \Delta l_\alpha = \frac{N_\alpha l_\alpha}{E^\alpha F^\alpha} \to \Delta l_\alpha = \frac{N_\alpha h}{E^\alpha F^\alpha \sin\omega_\alpha}$$

otrzymamy wzór na siłę osiową w dowolnym pręcie (α)

$$N_\alpha = \frac{E^\alpha F^\alpha}{h} \Delta l_\alpha \sin\omega_\alpha \to N_\alpha = \frac{E^\alpha F^\alpha}{h} \beta\alpha a \sin^2\omega_\alpha$$

Wartość nieznanego kąta obrotu β wyznaczymy z warunku równowagi sumy momentów sił liczonych względem przegubu A

$$\frac{q}{2}(ma)^2 - \sum_\alpha \alpha a N_\alpha \sin\omega_\alpha = 0$$

stąd

$$\frac{\beta a^2}{h} \sum_\alpha \alpha^2 E^\alpha F^\alpha \sin^3\omega_\alpha = \frac{q(ma)^2}{2} \to$$

$$\to \beta = h\frac{qm^2}{2}\left[\sum_\alpha \alpha^2 E^\alpha F^\alpha \sin^3\omega_a\right]^{-1}$$

Znając kąt obrotu β wyznaczamy siły osiowe w poszczególnych odciągach.

b) Zakładając, że odciągi wykonane są z **materiału nieliniowo sprężystego**

$$\sigma_\alpha = A^\alpha(\varepsilon)^N \to \Delta l_\alpha = \left(\frac{N_\alpha}{A^\alpha F^\alpha}\right)^n l_\alpha \to \Delta l_\alpha = \left(\frac{N_\alpha}{A^\alpha F^\alpha}\right)^n \frac{h}{\sin\omega_\alpha}$$

otrzymamy wzór na siłę osiową w dowolnym pręcie (α)

$$N_\alpha = A^\alpha F^\alpha \left(\frac{\Delta l_\alpha}{h}\sin\omega_\alpha\right)^N = A^\alpha F^\alpha \left(\frac{\beta\alpha a}{h}\sin^2\omega_\alpha\right)^N$$

Bez zmian pozostaje warunek równowagi momentów

$$\frac{q}{2}(ma)^2 - \sum_{\alpha} \alpha a N_\alpha \sin\omega_\alpha = 0$$

stąd

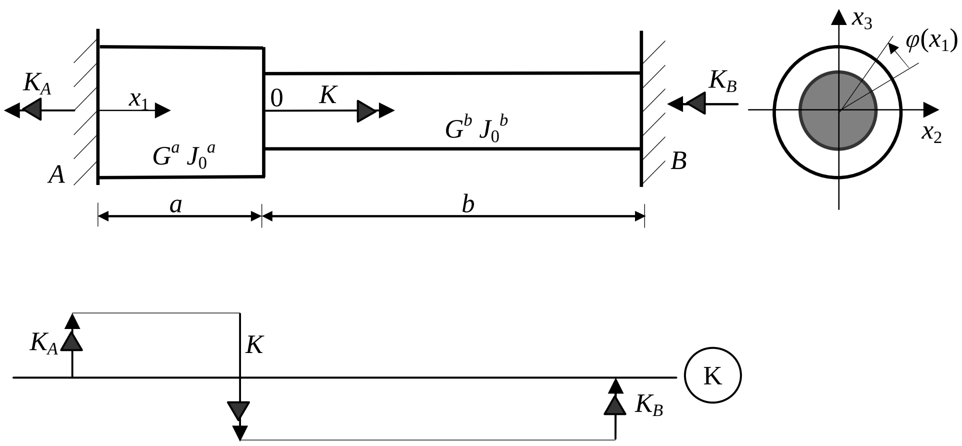
$$\sum_{\alpha} \alpha a A^\alpha F^\alpha \sin\omega_\alpha \left(\frac{\beta\alpha a}{h} \sin^2 \omega_\alpha \right)^N = \frac{q(ma)^2}{2} \to$$

$$\to \beta^N = \frac{q(ma)^2}{2} \left[\sum_{\alpha} \alpha a A^\alpha F^\alpha \sin\omega_\alpha \left(\frac{\alpha a}{h} \sin^2 \omega_\alpha \right)^N \right]^{-1}$$

Po wyliczeniu wartości wyrażenia β^N wyznaczymy siły osiowe w poszczególnych odciągach.

ZADANIE 1.10.

Obustronnie utwierdzony pręt kołowy o sztywności $G^a J_0^a$ w części lewej i $G^b J_0^b$ w prawej poddany jest działaniu momentu skręcającego K przyłożonego w punkcie 0 w osi belki (rys. 1.10a). Należy znaleźć momenty utwierdzenia K_A i K_B. Zadanie należy przeanalizować w zakresie liniowo sprężystym oraz liniowo lepkosprężystym.



Rys. 1.10a

Rozwiązanie:

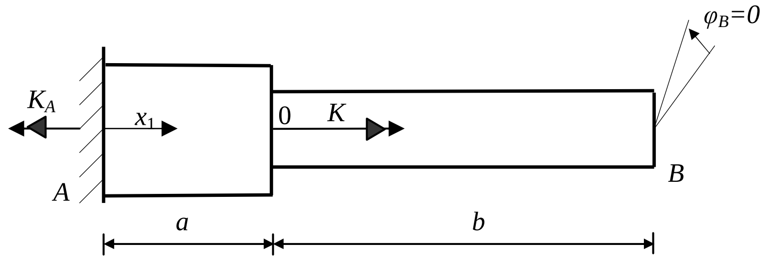
Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Równoważny układ statycznie wyznaczalny otrzymamy po odrzuceniu utwierdzenia B (rys. 1.10b). Aby równoważność obu zadań była zachowana, wymagamy, by kąt obrotu w punkcie B był równy zero

$$\varphi_B = 0$$

Z warunku równowagi sumy rzutów momentów na oś x_1 wynika, że

$$-K_A + K - K_B = 0 \rightarrow K_A = K - K_B$$

Dodatkowe równanie pozwalające obliczyć momenty twierdzenia K_A i K_B otrzymamy wykorzystując warunek nierozdzielności.



Rys. 1.10b

a) W **zadaniu liniowo sprężystym** kąt obrotu przekroju skręcanego określa wzór

$$\varphi = \frac{K}{GJ_0} l$$

Wówczas warunek nierozdzielności prowadzi do zależności

$$\varphi_B = 0 \rightarrow \frac{K_A a}{G^a J_0^a} + \frac{(K_A - K)b}{G^b J_0^b} = 0 \rightarrow \mathrm{K_A}\left(\frac{a}{G^a J_0^a} + \frac{b}{G^b J_0^b}\right) - \frac{Kb}{G^b J_0^b} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathrm{K_A} = \frac{Kb}{G^b J_0^b}\left(\frac{a}{G^a J_0^a} + \frac{b}{G^b J_0^b}\right)^{-1}$$

Z warunku otrzymamy

$$K_B = K - K_A \rightarrow K_B = K - \frac{Kb}{G^b J_0^b}\left(\frac{a}{G^a J_0^a} + \frac{b}{G^b J_0^b}\right)^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathrm{K_B} = \frac{Ka}{G^a J_0^a}\left(\frac{a}{G^a J_0^a} + \frac{b}{G^b J_0^b}\right)^{-1}$$

b) W **zadaniu liniowo lepkosprężystym** kąt obrotu przekroju skręcanego określa wzór

$$\varphi = \frac{l}{J_0} K * dG^{-1}$$

Wówczas warunek nierozdzielności (1) prowadzi do zależności

$$\varphi_B = 0 \rightarrow \frac{K_A a}{J_0^a} * d\left(G^a\right)^{-1} + \frac{\left(K_A - K\right)b}{J_0^b} * d\left(G^b\right)^{-1} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathrm{K_A}\left(\frac{a}{J_0^a} * d\left(G^a\right)^{-1} + \frac{b}{J_0^b} * d\left(G^b\right)^{-1}\right) - \frac{Kb}{J_0^b} * d\left(G^b\right)^{-1} = 0$$

Otrzymaliśmy tu równanie typu splotu, z którego należy wyznaczyć poszukiwany, zmienny w czasie moment utwierdzenia. W przypadku szczególnym, kiedy

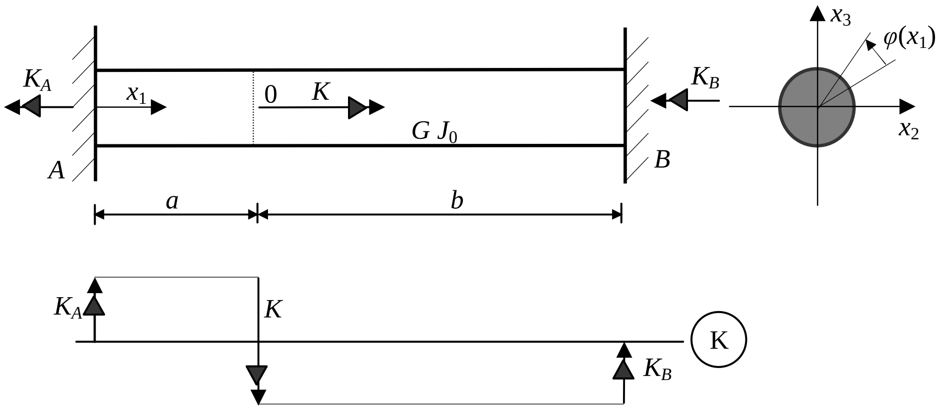
$$G^a(t) = G^a f(t) \quad \text{i} \quad G^b(t) = G^b f(t)$$

zadanie liniowo lepkosprężyste pokrywa się z liniowo sprężystym tj.

$$\mathrm{K_A} = \frac{Kb}{G^b J_0^b}\left(\frac{a}{G^a J_0^a} + \frac{b}{G^b J_0^b}\right)^{-1} \quad \text{i} \quad K_B = \frac{Ka}{G^a J_0^a}\left(\frac{a}{G^a J_0^a} + \frac{b}{G^b J_0^b}\right)^{-1}$$

ZADANIE 1.11.

Należy określić rozkład momentów skręcających w jednorodnym pręcie kołowym obustronnie utwierdzonym poddanym działaniu momentu skręcającego K przyłożonego w punkcie 0 (rys. 1.11a). Zadanie należy przeanalizować w zakresie liniowo i nieliniowo sprężystym oraz lepkosprężystym.

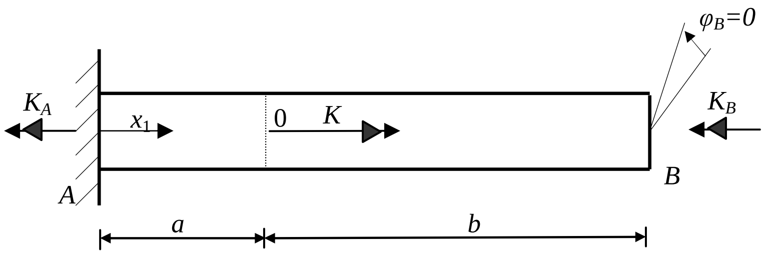


Rys. 1.11a

Rozwiązanie:

Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Równoważny układ statycznie wyznaczalny otrzymamy po odrzuceniu utwierdzenia B (rys. 1.11b). Aby równoważność obu zadań była zachowana, wymagamy, by kąt obrotu w punkcie B był równy zero

$$\varphi_B = 0$$



Rys. 1.11b

Z warunku równowagi- sumy rzutów momentów na oś x_1 wynika, że

$$-K_A + K - K_B = 0 \rightarrow K_A = K - K_B$$

Dodatkowe równanie pozwalające obliczyć momenty twierdzenia K_A i K_B otrzymamy wykorzystując warunek nierozdzielności.

a) W **zadaniu liniowo sprężystym** kąt obrotu przekroju skręcanego określa wzór

$$\varphi = \frac{K}{GJ_0} l$$

Wówczas warunek nierozdzielności prowadzi do zależności

$$\varphi_B = 0 \rightarrow \frac{K_A a}{GJ_0} + \frac{(K_A - K)b}{GJ_0} = 0 \rightarrow K_A(a+b) - Kb = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow K_A = K\frac{b}{a+b} = \frac{K}{1+\frac{a}{b}} = \frac{K}{1+\alpha}$$

gdzie

$$\frac{a}{b} = \alpha$$

Z warunku sumy rzutów momentów otrzymamy

$$K_B = K - K_A \rightarrow K_B = K - \frac{K}{1+\alpha} = K\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

b) W **zadaniu nieliniowo sprężystym** kąt obrotu przekroju dany jest zależnością

$$\varphi = \left(\frac{K}{\overline{G}J_0(N+1)}\right)^n l$$

Wówczas warunek nierozdzielności prowadzi do zależności

$$\varphi = 0 \rightarrow \left(\frac{K_A}{\overline{G}J_0(N+1)}\right)^n a + \left(\frac{K_A - K}{\overline{G}J_0(N+1)}\right)^n b = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (K_A)^n a + (K_A - K)^n b = 0$$

W przypadku szczególnym dla

$$n = 3 \ \text{ i } \ \frac{a}{b} = \alpha_1^3$$

otrzymamy

$$
\begin{aligned}
&(K_A)^3 a + (K_A - K)^3 b = 0 \rightarrow (K_A)^3 (\alpha_1)^3 + (K_A - K)^3 = 0 \rightarrow \\
&\rightarrow (K_A - K)^3 = -(K_A)^3 (\alpha_1)^3
\end{aligned}
$$

Stąd pierwszy z trzech pierwiastków tego równania wynosi

$$
K_A - K = -K_A \alpha_1 \rightarrow K_A = \frac{K}{1+\alpha_1}
$$

Z warunku sumy rzutów momentów otrzymamy

$$
K_B = K - K_A \rightarrow K_B = K - \frac{K}{1+\alpha_1} = K \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}
$$

c) W **zadaniu liniowo lepkosprężystym** kąt obrotu przekroju dany jest zależnością

$$
\varphi = \frac{1}{\mathrm{J}_0} \mathrm{K} * \mathrm{dG}^{-1}
$$

Wówczas warunek nierozdzielności prowadzi do zależności

$$
\begin{aligned}
&\varphi_B = 0 \rightarrow \frac{a}{J_0} K_A * dG^{-1} + \frac{b}{J_0} (K_A - K) * dG^{-1} = 0 \rightarrow \\
&\rightarrow \left[\frac{a}{J_0} K_A + \frac{b}{J_0} (K_A - K) \right] * dG^{-1} = 0 \rightarrow \\
&\rightarrow K_A a + (K_A - K) b = 0 \rightarrow K_A = K \frac{b}{a+b} = \frac{K}{1+\frac{a}{b}} = \frac{K}{1+\alpha}
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
\frac{a}{b} = \alpha
$$

Z warunku sumy rzutów momentów (2) otrzymamy

$$K_B = K - K_A \rightarrow K_B = K - \frac{K}{1+\alpha} = K\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

Otrzymany wynik jest identyczny, jak w zadaniu liniowo sprężystym.

d) W **zadaniu nieliniowo lepkosprężystym** kąt obrotu przekroju dany jest zależnością

$$\varphi = \left(\frac{1}{J_0(N+1)}K * d\overline{G}^{-1}\right)^n l$$

Wówczas warunek nierozdzielności (1) prowadzi do zależności

$$\varphi_B = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{J_0(N+1)}K_A * d\overline{G}^{-1}\right)^n a + \left(\frac{1}{J_0(N+1)}(K_A - K) * d\overline{G}^{-1}\right)^n b = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(K_A * d\overline{G}^{-1}\right)^n a + \left((K_A - K) * d\overline{G}^{-1}\right)^n b = 0$$

W przypadku szczególnym dla

$$n = 3 \quad \text{i} \quad \frac{a}{b} = (\alpha_1)^3$$

otrzymamy

$$\left(K_A * d\overline{G}^{-1}\right)^3 a + \left((K_A - K) * d\overline{G}^{-1}\right)^3 b = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(K_A * d\overline{G}^{-1}\right)^3 (\alpha_1)^3 + \left((K_A - K) * d\overline{G}^{-1}\right)^3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left((K_A - K) * d\overline{G}^{-1}\right)^3 = -\left(K_A * d\overline{G}^{-1}\right)^3 (\alpha_1)^3$$

stąd

$$(K_A - K) * d\overline{G}^{-1} = -\alpha_1 K_A * d\overline{G}^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow [\alpha_1 K_A + (K_A - K)] * d\overline{G}^{-1} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha_1 K_A + (K_A - K) = 0 \rightarrow K_A = \frac{K}{1+\alpha_1}$$

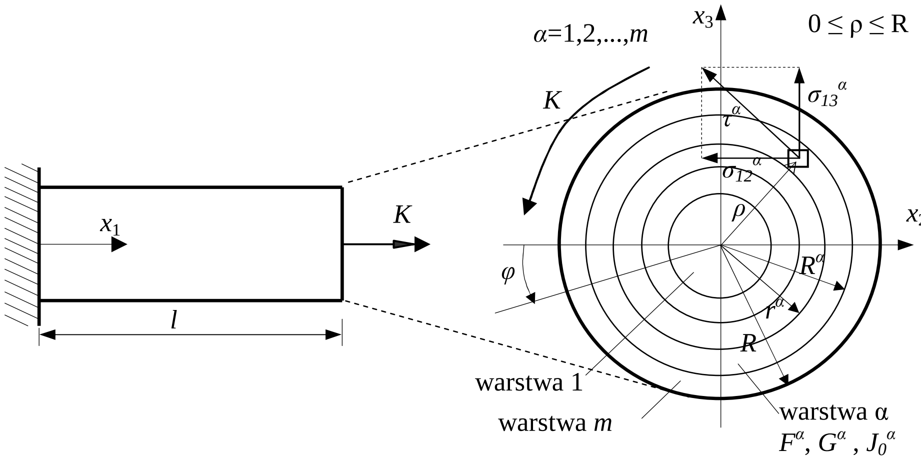
Z warunku sumy rzutów momentów otrzymamy

$$K_B = K - K_A \rightarrow K_B = K - \frac{K}{1+\alpha_1} = K\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}$$

Otrzymany wynik jest identyczny, jak w zadaniu nieliniowo sprężystym.

ZADANIE 1.12.

Należy określić rozkłady naprężeń stycznych w skręcanym pręcie kołowym, złożonym z układu m współśrodkowych warstw o własnościach fizycznych określonych równaniami $\tau^{\alpha} = 2G^{\alpha}\gamma^{\alpha}$, gdzie $\tau^{\alpha}, G^{\alpha}$ i γ^{α} są kolejno naprężeniem stycznym, modułem Kirchhoffa i kątem odkształcenia postaciowego warstwy (α) (rys. 1.12a).



Rys. 1.12a Skręcanie pręta warstwowego

Rozwiązanie:

W skręcanym pręcie kołowym jednorodnym zależność między momentem skręcającym K, a kątem obrotu w przekrojach oddalonych o l od punktu utwierdzenia ma postać

$$\varphi = \frac{Kl}{GJ_0} \quad \text{lub} \quad K = GJ_0 \frac{\varphi}{l}$$

gdzie

$$J_0 = \int_0^R \rho^2 dF$$ - biegunowy moment bezwładności

Natomiast rozkład naprężeń stycznych określany jest równaniem

$$\tau = \frac{K\rho}{J_0}$$

W analizowanym pręcie warstwowym moment skręcający K jest sumą momentów skręcających K^α warstw

$$K = \sum_\alpha K^\alpha$$

przy czym część momentu skręcającego przenoszonego przez warstwę (α) określa zależność

$$K^\alpha = G^\alpha J_0^\alpha \frac{\varphi}{l}, \quad J_0^\alpha = \int_{r^\alpha}^{R^\alpha} \rho^2 dF$$

gdzie J_0^α - biegunowy moment bezwładności warstwy (α).

Zadanie jest $(\alpha - 1)$-krotnie wewnętrznie statycznie niewyznaczalne. Zachodzi warunek

$$K = \sum_\alpha K^\alpha = \sum_\alpha G^\alpha J_0^\alpha \frac{\varphi}{l} \rightarrow \varphi = \frac{Kl}{\sum_\alpha G^\alpha J_0^\alpha}$$

Po wyznaczeniu kąta obrotu φ moment cząstkowy K_α wynosi

$$K^\alpha = G^\alpha J_0^\alpha \frac{\varphi}{l} \rightarrow K^\alpha = K \frac{G^\alpha J_0^\alpha}{\sum_\alpha G^\alpha J_0^\alpha}$$

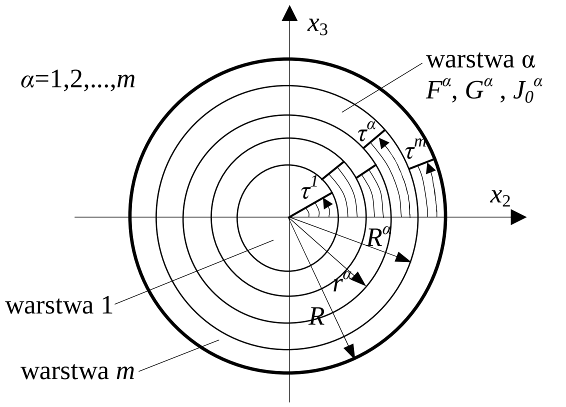
a naprężenie tnące w warstwie (α) określa relacja

$$\tau^\alpha = \sqrt{\sigma_{31}^\alpha + \sigma_{32}^\alpha} = \frac{G^\alpha K\rho}{\sum_\alpha G^\alpha J_0^\alpha}$$

gdzie

$$r^\alpha < \rho \le R^\alpha$$

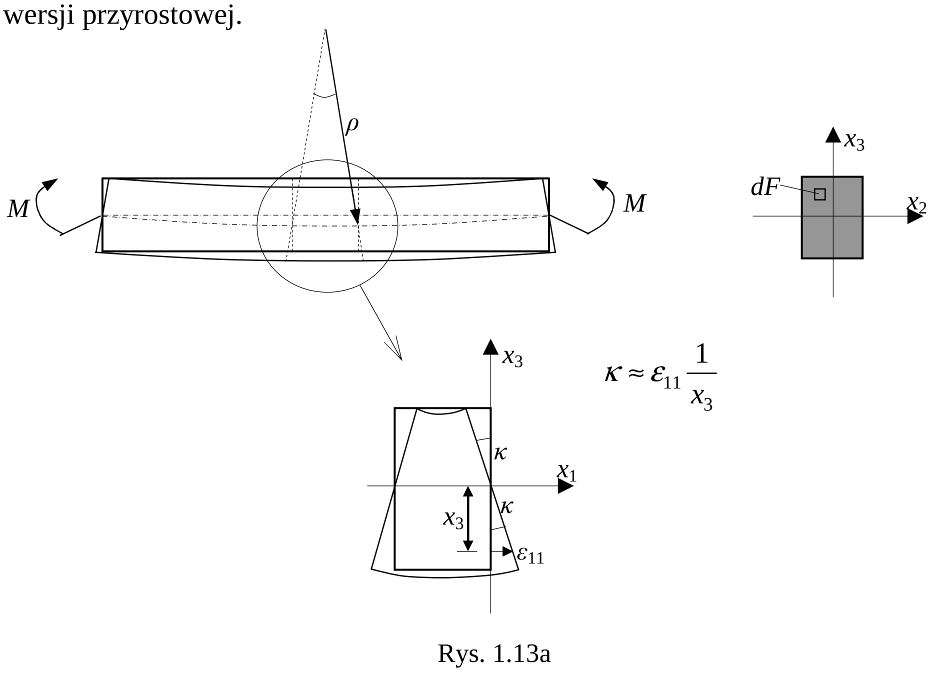
Z równania wynika, że jeśli poszczególne warstwy (α) przekroju zostaną wykonane z materiałów o różnych modułach Kirchhoffa G^α, to na granicach tych warstw pojawią się skoki naprężeń (rys. 1.12b).



Rys. 1.12b Rozkłady naprężeń tnących

ZADANIE 1.13.

Pręt o sztywności EJ poddano działaniu momentu zginającego M (rys. 1.13a). Należy określić w przekroju pręta rozkłady naprężeń normalnych σ_{11}. Zadanie należy przeanalizować w zakresie liniowo sprężystym, nieliniowo sprężystym, liniowo lepkosprężystym, nieliniowo lepkosprężystym oraz w wersji przyrostowej.



Rys. 1.13a